

Calcul algébrique

Feuille accompagnatrice

1) Cogitos

Pré-chapitre

1. Quelle est l'expression générale, en fonction du premier terme, d'une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$?
2. Soit $S_n = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$. On a

$$2S_n = S_n + S_n = (1 + \dots + n) + (n + \dots + 1) = (1 + n) + (2 + (n-1)) + \dots + (n+1) = n \cdot (n+1),$$

donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Par la même méthode, calculer $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$.

3. Justifier qu'il n'est pas possible de factoriser $x^8 + y^8$ par $x + y$ (au sens d'écrire $x^8 + y^8 = (x + y)(\dots)$, l'autre facteur étant une expression polynomiale en x, y).
4. En écrivant, pour n impair, $x^n + y^n = x^n - (-y)^n$, factoriser $x^n + y^n$ par $x + y$.
5. On considère des mots s'écrivant avec les lettres a et b , comme $aabb$ ou $abab$.
 - a) Combien existe-t-il de tels mots de longueur 5?
 - b) Combien existe-t-il de tels mots de longueur 5, avec exactement 3 fois la lettre a ?
 - c) Quel est le lien avec le développement de $(a + b)^5$?
6. Deux nombres x_1, x_2 ont pour somme s et pour produit p .
 - a) Trouver un polynôme de degré 2 dont ils sont les racines.
 - b) Exprimer $x_1^2 + x_2^2$ en fonction de s et p .
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comment s'exprime le nombre de chiffres décimaux de n en fonction de $\log n$, son logarithme décimal?
Indication : si $1\,000 \leq n < 10\,000$, que peut-on dire de $\log n$?
8. Développer $(a + b + c + d)^2$.
9. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, développer le polynôme $(X - a)(X - b)(X - c)$, et identifier ses coefficients constant, en X et en X^2 .
De même, quels sont les coefficients du polynôme $(X - a)(X - b)(X - c)(X - d)$.
Ces expressions sont symétriques en a, b, c, d , au sens où si on « permute » ces quatre nombres, les coefficients sont inchangés.
10. Soient α, β, γ trois nombres non nuls. On note $p = \alpha\beta\gamma$, $s = \alpha + \beta + \gamma$ et $q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$.
Exprimer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ en fonctions de p, s et q .

Post-chapitre

1. Comment justifier formellement le changement d'indice $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_{n-k}$?
2. Parmi les sommes suivantes, lesquelles se simplifient à l'aide d'une formule du cours?
 - a) $\sum_{k=1}^n 2^{2k+1}$
 - b) $\sum_{k=1}^n \sqrt{2k+1}$
 - c) $\sum_{k=1}^n 2^{1/k}$
 - d) $\sum_{k=1}^n 2^k 3^{n-k}$
 - e) $\sum_{k=1}^n 2^k \binom{n}{k}$
 - f) $\sum_{k=1}^n \binom{3n}{n+k}$
3. Comment calculer $\sum_{k=1}^n kx^k$?
4. Montrer que $\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. En déduire leur valeur commune.
5. Parmi les expressions suivantes, lesquelles peut-on transformer en un produit d'un facteur et d'un autre coefficient binomial?
 - a) $n \binom{n}{k}$
 - b) $k \binom{n}{k}$
 - c) $(n-k) \binom{n}{k}$
 - d) $\frac{1}{n} \binom{n}{k}$
 - e) $\frac{1}{k} \binom{n}{k}$
6. Inverser la sommation : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \dots$
7. Simplifier $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - \sum_{i \leq j} x_i x_j$.
8. Dans le développement du polynôme $\prod_{i=1}^n (X - x_i)$, quel est le coefficient en X^{n-p} ?
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ dont l'écriture en base b est $n = \sum_{k=0}^m a_k b^k$. À partir de n , comment calculer a_0, m et a_m ?
10. Que vaut la somme d'une colonne du triangle de Pascal, comme $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m}$?
11. Qu'obtient-on en développant $(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}) (\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!})$?
Soit $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Dans le développement, on considère tous les termes pour lesquels $i + j = m$. Quelle est la somme de ceux-ci?

[Lien vers des QCMS](#)

2) Objectifs du chapitre

- se familiariser, si nécessaire, avec les manipulations algébriques utilisant la notation Σ .
- rappels sur les coefficients binomiaux, d'un point de vue algébrique.
- calculs de sommes usuelles : géométriques, télescopiques, binomiales
- manipulation de sommes doubles, multiples. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

3) À connaître

Remarque Ce chapitre est principalement un chapitre de méthodes. Il faut en priorité savoir refaire les exemples du cours et les exercices du TD.

• $\sum_{k=1}^n k^2 = \dots$ • énoncé de la formule de Pascal, démonstration. • démonstration du binôme de Newton • Méthode de calcul d'une somme géométrique dérivée ($\sum kx^k$) • factorisation de $a^n - b^n$ et variations • énoncé de la décomposition en base b , démonstration • relations coefficients racines pour un polynôme $P(X) = a_n \prod_{i=1}^n (X - x_i)$

4) Réponses aux cogitos

Pré-chapitre

1. $u_n = u_0^{2^n}$.
2. $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$.
3. Si $x+y$ divisait x^8+y^8 , cette expression s'annulerait lorsque $x = -y$.
4. Pour n impair, $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$.
5. Il y a $2^5 = 32$ mots, dont $\binom{5}{3} = 10$ contenant trois lettres a . 2^5 est le nombre de termes du développement de $(a+b)^5$ avant regroupement, et $\binom{5}{3}$ est le nombre de termes égaux à a^3b^2 .
6. Le polynôme est $X^2 - sX + p$, et $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p$.
7. Le nombre de chiffres de n est $\lfloor \log n \rfloor + 1$.
8. $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.
9. Les coefficients sont $X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$ et $X^4 - (a+b+c+d)X^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)X^2 - (abc+abd+acd+bcd)X + abcd$.
10. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{q}{p}$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = s^2 - 2q$.

Post-chapitre

1. L'application $k \mapsto n - k$ est une bijection de $\llbracket 0, n \rrbracket$ dans lui-même.
2. Les sommes 1 et 4 sont géométriques, et la somme 5 relève du binôme.
Les trois autres ne relèvent pas directement d'une formule du cours.
3. Dériver $\sum_{k=0}^n x^k$, puis multiplier par x . Pour $x \neq 1$, $\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$.
4. Pour $n \geq 1$, les deux sommes sont égales à 2^{n-1} .
5. Les expressions 2 et 3 : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, $(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k}$.
6. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$.
7. Le résultat est $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.
8. Le coefficient de X^{n-p} est $(-1)^p \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_p}$.
9. a_0 est le reste de la division euclidienne de n par b .
On a $m = \lfloor \log_b n \rfloor$, puis $a_m = \lfloor n/b^m \rfloor$.
10. $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} = \binom{n+m+1}{m+1}$ (le coefficient en bas à droite de la colonne)
11. On obtient $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{i!j!}$. Pour $0 \leq m \leq n$, la somme des termes tels que $i+j = m$ vaut $\sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!} = \frac{(1-1)^m}{m!}$, soit 1 pour $m=0$, et 0 sinon.

5) Perspectives historiques et culturelles



Blaise Pascal (1623 – 1662), français.
Formule le principe de récurrence.



Leonhard Euler (1707 – 1783), suisse.
Il est à l'origine de la notation Σ .



Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), allemand.
« Le prince des mathématiciens. »

Les sommes de Gauss

Les sommes de Gauss sont des sommes de la forme $G_p = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2i\pi k^2/p}$, pour p premier impair.

Elle sont intimement liées aux résidus quadratiques modulo p , c'est-à-dire à quels $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ peuvent s'écrire comme des carrés modulo p , c'est-à-dire $k = \ell^2[p]$, pour $\ell \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ (et plus généralement à la résolution d'équations quadratiques comme $x^2 + y^2 = a$ modulo p).

Exactement la moitié des résidus de $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ sont des carrés et chacun admet exactement deux « racines carrées ». Outre cette propriété simple, la structure des résidus quadratiques est riche et non triviale.

L'étude des sommes de Gauss en révèle une première facette. La somme G_p contient p termes tous de module 1, ces termes étant exactement les résidus quadratiques. Il est tout à fait remarquable (et relativement simple à montrer) qu'elles vérifient exactement $|G_p| = \sqrt{p}$, ce qui traduit en particulier une certaine répartition globalement équilibrée des résidus quadratiques.

On en connaît en fait une forme exacte : $G_p = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{si } p \equiv 1[4] \\ i\sqrt{p} & \text{si } p \equiv 3[4] \end{cases}$, démontrée par Gauss après quatre années d'efforts.

Elle a pour conséquence la loi de réciprocité quadratique suivante, règle d'or du calcul des résidus quadratiques.

Théorème Soit p, q des nombres premiers impairs, on note $\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est un résidu quadratique modulo } q \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a alors $\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$